

平成22年度 宮城県 公立高校入試問題<数学>解説

第一問 次の1~5の問いに答えなさい。

1  $(1-7) \div 2$  を計算しなさい。

$$\frac{1-7}{2} = -6 \div 2 = -3$$

答え -3

**ポイント** 四則の計算は括弧の中から行う

2 方程式  $5x - 6 = 3x + 2$  を解きなさい。

$$5x - 3x = 2 + 6 \quad 2x = 8 \quad x = 4$$

答え  $x = 4$

**ポイント** 文字同士、数字同士にしてから計算、移項時には符号が変わるので注意

3  $a = \frac{1}{3}$  のとき、 $4(a+2) - a$  の値を求めなさい。

$$4a + 8 - a = 3a + 8 = 3 \times \frac{1}{3} + 8 = 1 + 8 = 9$$

答え 9

**ポイント** まずは文字式を整理してから、値を代入する

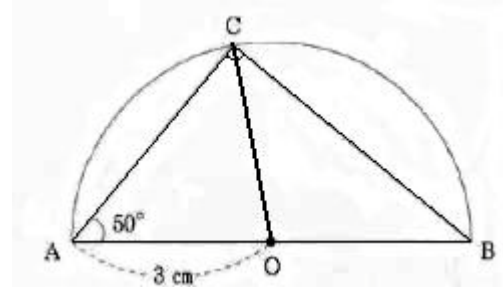
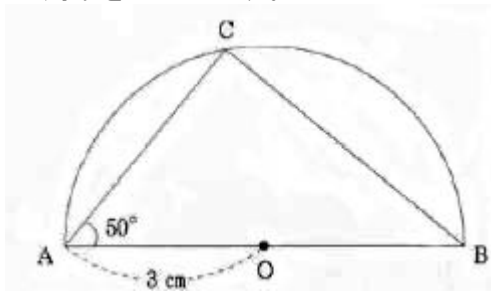
4  $x^2 - 8x + 12$  を因数分解しなさい。

$$x^2 - 8x + 12 = (x-2)(x-6)$$

答え  $(x-2)(x-6)$

**ポイント** 乗法公式の利用  $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$

5 下の図のように、線分ABを直径とする半円Oの弧の上に点Cをとります。OA=3cm、 $\angle BAC = 50^\circ$  であるとき、 $\angle ABC$ の大きさと $\widehat{AC}$ の長さを求めなさい。  
ただし、円周率を $\pi$ とします。



OCに補助線を引く。 $\triangle AOC$ は二等辺三角形(AOとCOが円の半径だから)なので、 $\angle ACO = 50^\circ$  同様に $\triangle BOC$ も二等辺三角形。また、円周角の定理より $\angle ACB = 90^\circ$

**ポイント** 円周角の定理 1: 円周角は中心角の半分である(特に直径に対する円周角は $90^\circ$ )

2: 等しい弧に対する円周角は等しい

したがって、 $\angle ABC = \angle BCO = \angle ACB - \angle ACO = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$

また、 $\angle AOC = 180^\circ - (50^\circ \times 2) = 80^\circ$

$\widehat{AC}$ の長さは  $3 \times 2 \times \pi \times \frac{80}{360} = \frac{4}{3} \pi$

答え  $40^\circ$ ,  $\frac{4}{3} \pi$

第 二 問 次の1～3の問いに答えなさい。

1 文化祭の受付係を2名募集したところ、2人の男子A、Bと2人の女子C、Dの計4人の希望者がいました。この4人の中から、くじびきで2人を選ぶとき、男子1人と女子1人が選ばれる確率を求めなさい。

4人から2人を選ぶ通りは

A-B, A-C, A-D, B-C, B-D, C-Dの6通り

そのうち、男子1人と女子1人選ばれるのは

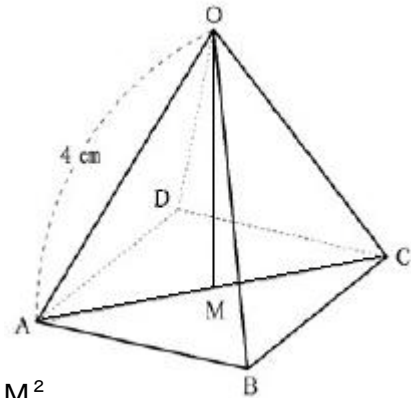
A-C, A-D, B-C, B-Dの4通り

したがって、 $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

答え  $\frac{2}{3}$

2 右の図のように、正四角錐O-ABCDにおいて、線分ACの中点Mと頂点Oを結ぶ線分をひきます。

△OACの1辺4cmの正三角形であるとき、線分OMの長さとの正四角錐の体積を求めなさい。



△OACは正三角形なので、 $OA = AC = 4 \text{ cm}$

また、Mは線分ACの中点なので、 $AM = 2 \text{ cm}$

△OAMにおいて、三平方の定理を利用すると $OA^2 = OM^2 + AM^2$

**ポイント** 三平方の定理： $(斜辺)^2 = (底辺)^2 + (対辺)^2$

$16 = OM^2 + 4$  となり、 $OM^2 = 16 - 4 = 12$

したがって、 $OM = 2\sqrt{3} \text{ cm}$

□ABCDは正方形なので、対角線 $BD = AC = 4 \text{ cm}$

□ABCDの面積は  $4 \times 4 \div 2 = 8$

正四角錐O-ABCDの体積は  $\frac{1}{3} \times 8 \times 2\sqrt{3} = \frac{16}{3} \sqrt{3}$

**ポイント** 錐の体積の求め方  $\frac{1}{3} \times \text{底面積} \times \text{高さ}$

ひし形(正方形)の面積の求め方 対角線の長さ×対角線の長さ÷2

3  $y$  は  $x$  に比例し、その比例定数は負の数です。 $x$  の変域が  $-6 \leq x \leq 3$  のとき、 $y$  の変域は  $-7 \leq y \leq \square$  になります。 $\square$  にあてはまる数を求めなさい。

比例するので、 $y = ax$  …①とおける

比例定数は負の数なので、 $x$  が最大るとき、 $y$  が最小になる

$x = 3$ 、 $y = -7$  を①に代入すると、 $-7 = 3a$

したがって、 $a = -\frac{7}{3}$

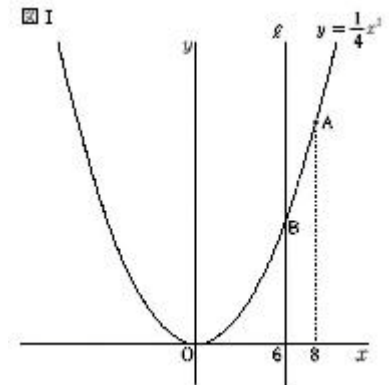
$a$  の値を①に代入すると  $y = -\frac{7}{3}x$  …②

②に  $x = -6$  を代入すると、 $y = -\frac{7}{3} \times -6 = 14$

第三問 図Iのように、関数  $y = \frac{1}{4}x^2$  のグラフ上に  $x$  座標が 8 となる点 A をとります。また、

点 (6, 0) を通り、 $y$  軸に平行な直線を、関数  $y = \frac{1}{4}x^2$  のグラフとの交点を B とします。

次の 1~3 の問いに答えなさい。



1 点 A の  $y$  座標を求めなさい。

点 A の座標は 8 なので、 $y = \frac{1}{4} \times 8^2 = 16$

答え 16

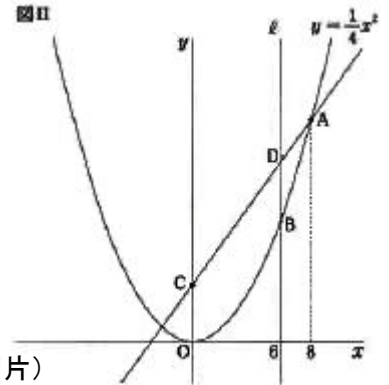
2 関数  $y = \frac{1}{4}x^2$  について、 $x$  が 0 から 6 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

$x = 0$  のとき  $y = \frac{1}{4} \times 0^2 = 0$  ,  $x = 6$  のとき  $y = \frac{1}{4} \times 6^2 = \frac{1}{4} \times 36 = 9$

変化の割合 =  $\frac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}} = \frac{9-0}{6-0} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

答え  $\frac{3}{2}$

3 図IIは、図Iにおいて、軸上の正の部分に点 C をとり、直線 AC と直線との交点を D としたものです。OC = BD となるときの、直線 AC の式を求めなさい。



点 B の座標は 上記 2 より B (6, 9) となる

点 C の  $y$  座標を  $c$  とすると、C (0,  $c$ )

OC = BD となるので、D (6, 9 +  $c$ )

2 点 C, D を通る直線の式を求める

**ポイント** 直線の式は  $y = ax + b$  …①と表せる ( $a$  : 傾き、 $b$  : 切片)

①に C (0,  $c$ ) を代入すると  $c = b$  …②

① D (6, 9 +  $c$ ) と②を代入すると  $9 + c = 6a + c$   $6a = 9$   $a = \frac{3}{2}$  …③

② ③を①に代入すると  $y = \frac{3}{2}x + b$  …④

また、点 A (8, 16) を通るので、④に代入し

$y = \frac{3}{2}x + b$   $16 = \frac{3}{2} \times 8 + b$   $b = 16 - 12 = 4$

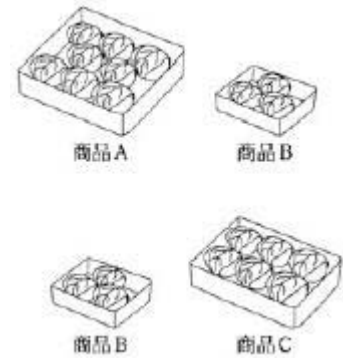
したがって、 $y = \frac{3}{2}x + 4$

答え  $y = \frac{3}{2}x + 4$

第四問 数学の授業で、次の【課題】が出されました。  内は、課題の1を考えている  
 ≪1班≫と、課題の2へ進んだ≪2班≫の生徒と先生の会話です。  
 あとの1, 2の問いに答えなさい。

【課題】 ある和菓子屋では、500個の桜もちを販売する予定です。

1 8個入りの商品Aを何個かと3個入りの商品Bを何個か作り、桜もちの総数を500個になるようにします。和菓子屋では、  
 ①箱の数の合計が最も少なくなるようにしたいと思っています。  
 このとき、箱の数の合計について考えなさい。



2 3個入りの商品Bと6個入りの商品Cとでは、それぞれの箱の数をどのようにしても、  
 ②桜もちの総数を500個にできません。  
 そのわけを考えなさい。

≪1班≫

先生：何か気づいたことはありますか。

生徒：桜もちの総数が500個になるのは、例えば、商品Aが10箱と商品Bが140箱のときや、商品Aが40箱と商品Bが ア 箱のときで、それぞれの場合では、箱の数の合計が異なります。

先生：そうですね。箱の数の合計について、他に気づいたことはありますか。

生徒：商品Aの箱の数が増えると、商品Aと商品Bの箱の数の合計が減るという関係があるようです。

先生：なるほど。その考え方を試してみるとよいですね。

≪2班≫

生徒：商品Aと商品Bでは桜もちの総数を500個にできたのに、商品Bと商品Cではできないのはなぜかな。どう考えればよいのだろう。

先生：商品Bが $x$ 個と商品Cが $y$ 個あるとき、箱に入っている桜もちの総数は何個になりますか。

生徒：はい。 $x$ と $y$ を使った式で表すと イ (個) になります。

先生：500にならないだけは、その式を利用して考えるとみえてきますよ。

1 課題の1について、次の(1), (2)の問いに答えなさい。

(1) ア にあてはまる数を求めなさい。

商品Aの箱数×商品Aに入っている個数 + 商品Bの箱数×商品Bに入っている個数 = 総数

$$40 \times 8 + x \times 3 = 500$$

$$3x = 500 - 320 \quad 3x = 180 \quad x = 60$$

答え 60

(2) 下線部①のとき、商品Aと商品Bの箱の数の合計が何箱になるか求めなさい。

できるだけ商品A（8個入り）を増やした方が箱の数の合計が減るので、

$$500 \div 8 = 62 \cdots 4 \quad (62 \text{箱} \text{あ} \text{まり} 4 \text{個})$$

つまり、商品A（8個入り）62箱、商品B（3個入り）1箱、あまり1個

これではあまりが出てしまうので、商品A（8個入り）を1箱減らす

61箱あまり12個と考えると、商品A（8個入り）61箱、商品B（3個入り）4箱

合計65箱となる

答え 65箱

2 課題の2について、次の(1)、(2)の問いに答えなさい。

(1)  にあてはまる  $x$  と  $y$  を使った式を答えなさい。

商品Bの箱数  $\times$  商品Bに入っている個数 + 商品Cの箱数  $\times$  商品Cに入っている個数

$$3x + 6y$$

(2) 下線部②のようになるわけを文字式を用いて説明しなさい。

$$\text{桜もちの総数は } 3x + 6y = 3(x + 2y)$$

$x + 2y$  は整数だから、 $3(x + 2y)$  は3の倍数となる

500は3の倍数でないから、 $3x + 6y$  は、500にはならない

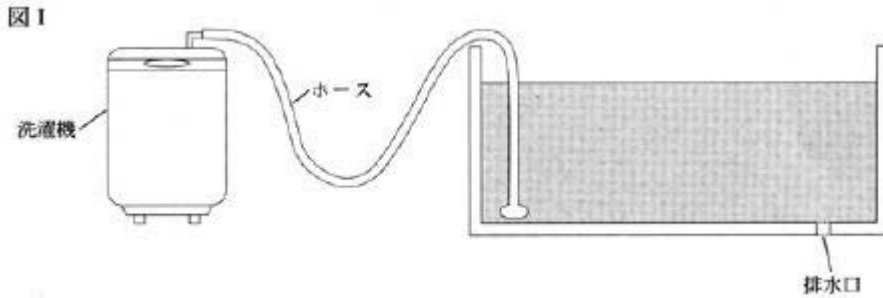
よって、500個にはできない

第五問 次の1, 2の問いに答えなさい。

1 Aさんの家の風呂は、内側が直方体の形をしています。この風呂に、図Iのように、風呂の水を洗濯機にくみ取るためのホースをつけました。風呂の水は、底面から水面までの高さが60cmのところまで入っています。

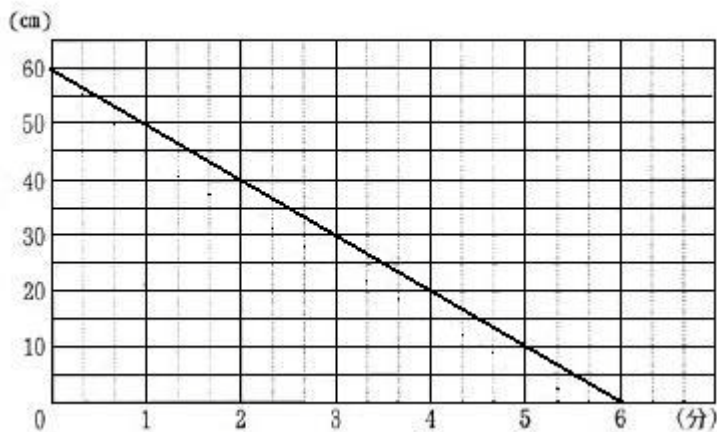
このとき、排水口から排水だけを行うと、底面から水面までの高さが1分間に10cmずつ一定の割合で下がります。また、排水口から排水と同時に洗濯機へのくみ取りを行うと1分間に15cmずつ一定の割合で下がります。ただし、底面と水面はつねに平行になっているものとします。

あとの(1), (2)の問いに答えなさい。



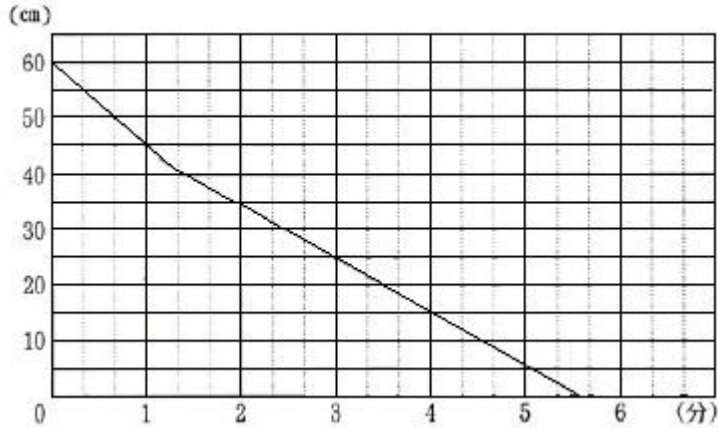
(1) 排水口から排水だけ行うとき、排水し始めてから水がすべてなくなるまでの、時間と底面から水面までの高さとの関係を表すグラフを解答用紙の図にかき入れなさい。

風呂の水は、底面から水面までの高さが60cmのところまで入っているので、0分のとき60cm  
排水口から排水だけを行うと、底面から水面までの高さが1分間に10cmずつ一定の割合で下がる  
1分後50cm, 2分後40cm, 3分後30cm, 4分後20cm, 5分後10cm, 6分後0cmとなる



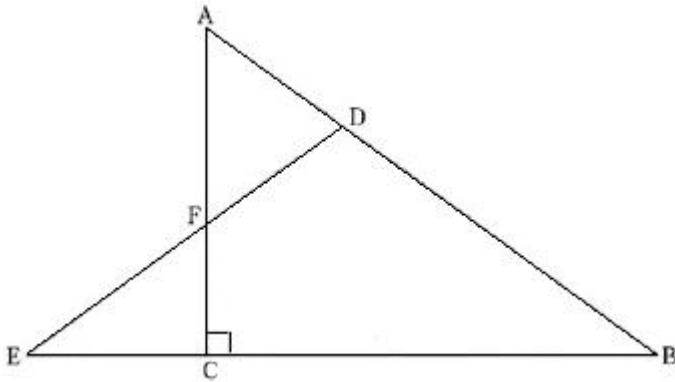
(2) Aさんは、排水口から排水と同時に洗濯機へのくみ取りを始め、排水し始めてから1分20秒後にくみ取りをやめ、その後も排水を続けました。このように行ったとき、くみ取りをしないで排水だけ行うときと比べ、排水し始めてから水がすべてなくなるまでの時間は、何秒短くなるか求めなさい。なお、図Ⅱを利用して考えてもかまいません。

図Ⅱ



くみ取りをしないで排水だけ行い、水がすべてなくなるまでの時間は(1)より6分  
 排水口から排水と同時に洗濯機へのくみ取ったとき、底面から水面までの高さが1分間に15cmずつ一定の割合で下がるので、1分20秒後の底面から水面までの高さは40cm  
 その後、排水だけ行うので、底面から水面までの高さが1分間に10cmずつ一定の割合で下がる底面から水面までの高さが40cmのとき、水がすべてなくなるまで4分かかる  
 つまり、5分20秒かかることになる  
 6分 - 5分20秒 = 40秒 答え 40秒

2 下の図のような、 $\angle ACB = 90^\circ$ の直角三角形ABCがあります。AC = 6cm, BC = 8cmとし、辺AB上に点Dを、AD = 3cmとなるようにとります。また、直線BC上に、DB = DEとなる点Eを、点Bと一致しないようにとり、辺ACと線分DEとの交点をFとします。



(1) 辺ABの長さを求めなさい。

$\triangle ABC$ において、三平方の定理を利用すると  $AB^2 = AC^2 + BC^2$

**ポイント** 三平方の定理: (斜辺)<sup>2</sup> = (底辺)<sup>2</sup> + (対辺)<sup>2</sup>

$AB^2 = 36 + 64$  となり、  $AB^2 = 100$   $AB = 10$  答え 10cm

(2)  $\triangle ABC \sim \triangle FEC$ であることを証明しなさい。

$\triangle ABC$ と $\triangle FEC$ において、

$\angle ACB = 90^\circ$  より

$$\angle ACB = \angle FCE = 90^\circ \quad \dots \textcircled{1}$$

$DB = DE$ より、 $\triangle DEB$ は二等辺三角形であるから

$$\angle DBE = \angle DEB$$

つまり、 $\angle ABC = \angle FEC \quad \dots \textcircled{2}$

①、②より、2組の角がそれぞれ等しいから  $\triangle ABC \sim \triangle FEC$

**ポイント** 三角形の相似 (3組の辺の比がすべて等しい、3組の角がそれぞれ等しい) 条件

1 : 3組の辺の比が等しい

2 : 2組の辺の比が等しく、その間の角が等しい

3 : 2組の角がそれぞれ等しい

(3) 線分EFの長さを求めなさい。

$$\angle FAC = 180^\circ - \angle ACB (= 90^\circ) - \angle DBE$$

$$\angle EFC = 180^\circ - \angle FCE (= 90^\circ) - \angle DEB$$

(2)より  $\angle DBE = \angle DEB$ だから  $\angle FAC = \angle EFC$

対頂角は等しいから  $\angle EFC = \angle AFD$

したがって、 $\angle FAC = \angle AFD$ となり、 $\triangle AFD$ は二等辺三角形

$$AD = FD = 3 \text{ cm}$$

$$\text{また、} DE = DB = AB - AD = 10 - 3 = 7 \text{ cm}$$

$$\text{したがって、} EF = DE - FD = 7 - 3 = 4 \text{ cm}$$

答え 4 cm

(4) 点Cと点Dを結ぶ線分をひきます。 $\triangle CDF$ の面積を求めなさい。

$$AB : FE = 10 : 4 = 5 : 2$$

$$\triangle ABC \sim \triangle FEC \text{ だから、} AC : FC = 6 : FC = 5 : 2 \quad FC = \frac{12}{5}$$

$$\text{同様に } BC : EC = 8 : EC = 5 : 2 \quad EC = \frac{16}{5}$$

$$\triangle FEC \text{ の面積は } = \frac{12}{5} \times \frac{16}{5} \div 2 = \frac{96}{25}$$

点DからBEに垂線をおろし、交点をGとする

$$\triangle ABC \sim \triangle DBG \text{ だから、} AB : BD = 10 : 7$$

$$AC : DG = 6 : DG = 10 : 7 \quad DG = \frac{21}{5}$$

$$\triangle CDE \text{ の面積は } = \frac{21}{5} \times \frac{16}{5} \div 2 = \frac{168}{25}$$

$$\triangle CDF \text{ の面積} = \triangle CDE \text{ の面積} - \triangle FEC \text{ の面積} = \frac{168}{25} - \frac{96}{25} = \frac{72}{25}$$

答え  $\frac{72}{25} \text{ cm}^2$

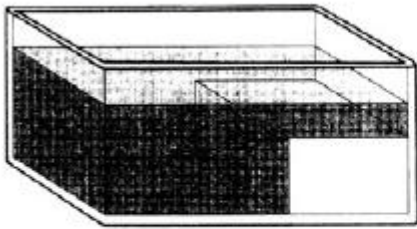
第五問 次の1, 2の問いに答えなさい。

1 図Iは、太郎さんの家の風呂を描いたものです。内側は、図IIのように直方体 $ABCD-EFGH$ から直方体 $IJKL-MNGH$ を除いた形をしています。底面 $EFGH$ と平面 $IJKL$ は平行になっており、底面 $EFGH$ を側面 $P$ とします。

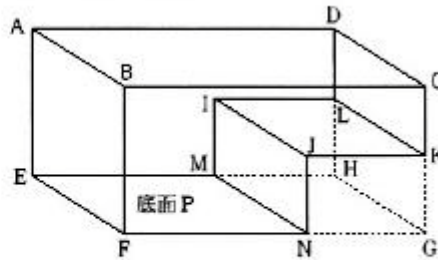
この風呂に、一定の割合で水を入れ、20分後に水を止めました。水を入れ始めてから $x$ 分後の底面 $P$ から水面までの高さを $y$ cmとします。下の表は、このときの $x$ と $y$ の関係を表したものです。ただし、底面 $P$ と水面はつねに平行になっているものとします。

あとの(1), (2)の問いに答えなさい。

図I 太郎さんの家の風呂



図II 風呂の内側



表

$x$ (分)	0	4	8	12	16	20
$y$ (cm)	0	14	28	40	48	56

(1) 底面 $P$ から水面までの高さ、底面 $P$ から平面 $IJKL$ までの高さが一致するのは、水を入れ始めてから何分何秒後か、求めなさい。なお、図IIIを利用して考えてもかまいません。

表から $y$ の変化量が変わるのは8~12分の間であることがわかる。

底面 $P$ に到達する前を前半とし、到達後を後半とする。

前半は0~4分の変化の割合から  $y = \frac{7}{2}x$  …① と式を作ることができる

後半は12~16分の変化の割合から  $y = 2x + 16$  …② と式を作ることができる

この前半と後半の式が一致したところが底面 $P$ に到達した時間と考えられる

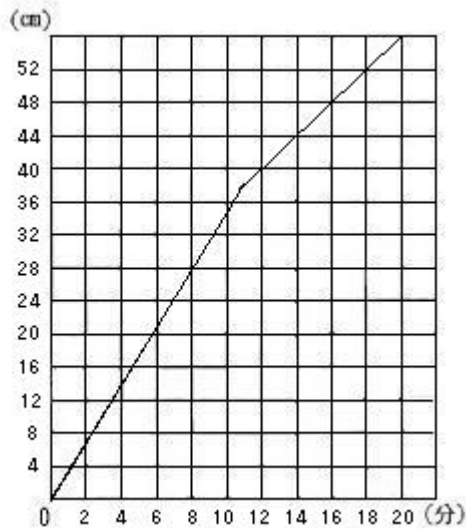
$$\text{①, ②より } \frac{7}{2}x = 2x + 16 \quad \frac{3}{2}x = 16 \quad x = \frac{32}{3} = (10 + \frac{2}{3}) \text{ 分}$$

$$\frac{2}{3} \text{ 分は } 60 \times \frac{2}{3} = 40 \text{ 秒}$$

したがって、10分40秒

答え 10分40秒

図Ⅲ



図Ⅲを利用すると上のような図ができる。ここから解答を考えてもよい

(2)  $AB=65$ ,  $BC=105$ とします。線分JKの長さを求めなさい。

1分間の水の増加量は前半も後半も変わらない(一定の割合で増えていく)。

また、線分FNの長さを  $x$  とおくとする

(1) より 1分間に増える水面の高さは前半  $\frac{7}{2}$  cm、後半 2 cm とわかる

$$\text{後半 (1分間の水の増加量)} : 65 \text{ cm (縦)} \times 105 \text{ cm (横)} \times 2 \text{ cm (高さ)} = 13650 \text{ cm}^3$$

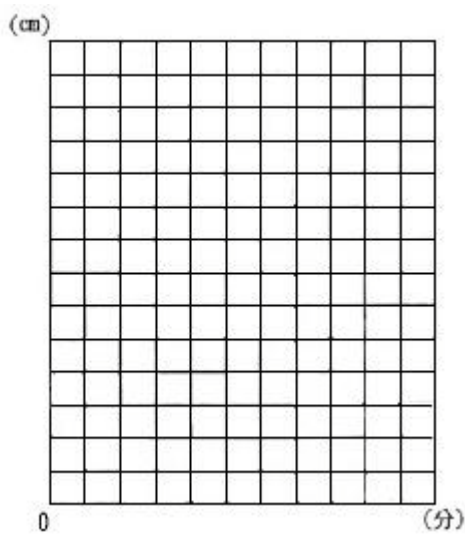
$$\text{前半 (1分間の水の増加量)} : 65 \text{ cm (縦)} \times x \text{ cm (横)} \times \frac{7}{2} \text{ cm (高さ)} = 13650 \text{ cm}^3$$

したがって、  $x=60$

$$JK=BC-FN=105-60=45$$

答え 45 cm

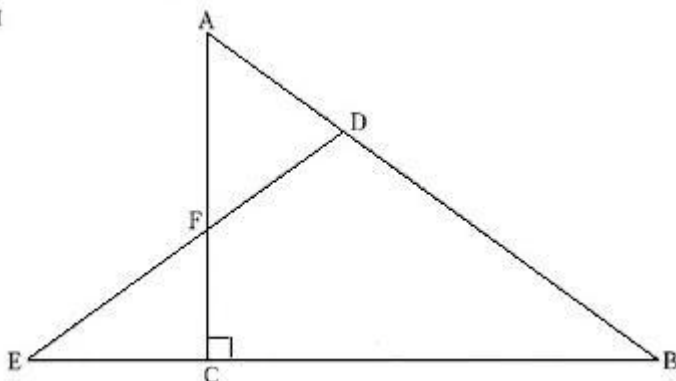
図Ⅲ



2 図Iのような、 $AB : BC = 5 : 4$ 、 $\angle ACB = 90^\circ$ の直角三角形ABCがあり、辺AB上に点Dをとります。また、直線BC上に、 $DB = DE$ となる点Eをとります。ただし、点D、Eは、どちらも点Bと一致しないようにとります。

あとの(1)、(2)の問いに答えなさい。

図I



(1) 線分BDと線分BEの長さの比を求めなさい。

点DからBEに垂線をおろし、交点をGとする

$\triangle ABC \sim \triangle DBG$ なので、 $AB : BC = DB : BG$

$5 : 4 = DB : BG$ となり、 $BG = \frac{4}{5} BD$

同様にして、 $\triangle ABC \sim \triangle DEG$ なので、 $EG = \frac{4}{5} BD$

$BE = BG + EG = \frac{8}{5} BD$

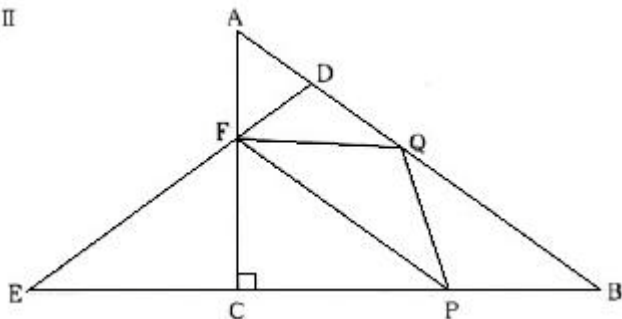
したがって、 $BD : BE = 5 : 8$

答え 5 : 8

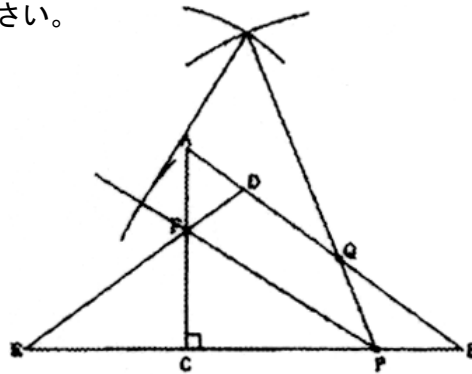
(2) 図IIは、図Iにおいて、 $AD : DB = 1 : 4$ とし、辺ABと線分DEとの交点をFとしたものです。また、辺BC上に点Pを、点Bと一致しないようにとり、辺AB上に点Qを、 $\angle FPQ = \angle ABC$ となるようにとり、 $\triangle FPQ$ をつくります。

あとの(ア)～(ウ)の問いに答えなさい。

図II



(ア) 点Pが解答用紙の図の位置にあるとき、点Qを、 $\triangle ABC$ と合同な三角形を作図することにより求めなさい。作図は、解答用紙の図に行い、点Qの位置を示す文字Qも書きなさい。なお、作図に用いた線は消さずに残しなさい。



(作図の仕方)

$\angle FPQ = \angle ABC$ より  $AB \parallel FP$ なので、線分FPを線分BCと同じ長さになるまで伸ばす  
その点から線分ACの長さと同じ長さを取り、点Pから線分ABの長さと同じ長さをとる  
その交点と点Pを結び、辺ABとの交点をQとする

(イ)  $\triangle FEP \cong \triangle PBQ$ であることを証明しなさい。

$\triangle FEP$ と $\triangle PBQ$ において

$DB = DE$ より、 $\triangle DEB$ は二等辺三角形であるから  $\angle DEB = \angle PBQ \dots \textcircled{1}$

三角形の外角は、それと隣り合わない2つの内角の和に等しいから

$$\angle EPQ = \angle PBQ + \angle BQP$$

$$\angle EPF + \angle FPQ = \angle PBQ + \angle BQP$$

$$\angle FPQ = \angle ABC \text{より、} \angle FPQ = \angle PBQ$$

$$\text{よって、} \angle EPF = \angle BQP \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ より、2組の角がそれぞれ等しいから  $\triangle FEP \cong \triangle PBQ$

(ウ)  $AB = 10\text{cm}$ とします。 $PQ = QF$ となる時、線分BPの長さを求めなさい。

(イ)より  $\triangle FEP \sim \triangle PBQ$ なので、 $PQ : FP = BP : FE \dots \textcircled{1}$

$PQ = QF$ なので、 $\triangle QPF$ は二等辺三角形となり、 $\angle PFQ = \angle FPQ$

また、 $DB = DE$ なので、 $\triangle DBE$ は二等辺三角形となり、 $\angle DBE = \angle DEB$

$\angle FPQ = \angle ABC$ なので、 $\angle FPQ = \angle DBE$ となり、2組の角がそれぞれ等しいので、

$\triangle DBE \sim \triangle QPF$ となる

したがって、 $PQ : DB = FP : BE \dots \textcircled{2}$

$AB = 10\text{cm}$  かつ  $AD : DB = 1 : 4$ なので、 $DB = 8\text{cm} \dots \textcircled{3}$

$AB : BC = 5 : 4$ なので、 $BC = 8\text{cm} \dots \textcircled{4}$

(1)より  $BD : BE = 5 : 8$ なので  $8 : BE = 5 : 8$ となり、 $BE = \frac{64}{5} \dots \textcircled{5}$

$\triangle ABC \sim \triangle FEC$ だから、 $AB : BC = FE : CE \dots \textcircled{6}$

$CE = BE - BC = \frac{64}{5} - 8 = \frac{24}{5} \dots \textcircled{7}$

$\textcircled{4}$ ,  $\textcircled{6}$ ,  $\textcircled{7}$ より、 $10 : 8 = FE : \frac{24}{5}$ となり、 $FE = 6\text{cm} \dots \textcircled{8}$

$\textcircled{2}$ ,  $\textcircled{3}$ ,  $\textcircled{5}$ より、 $PQ : 8 = FP : \frac{64}{5}$ となり、 $FP = \frac{8}{5}PQ \dots \textcircled{9}$

$\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{8}$ ,  $\textcircled{9}$ より、 $PQ : \frac{8}{5}PQ = BP : 6$ となり、 $\frac{8}{5}BP = 6$

$BP = \frac{5}{8} \times 6 = \frac{15}{4}$

答え： $\frac{15}{4}$