

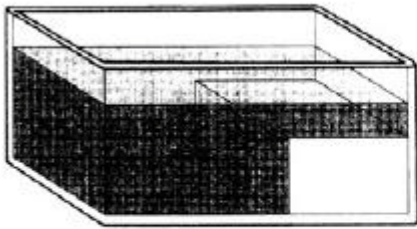
第五問 次の1, 2の問いに答えなさい。

1 図Iは、太郎さんの家の風呂を描いたものです。内側は、図IIのように直方体 $ABCD-EFGH$ から直方体 $IJKL-MNGH$ を除いた形をしています。底面 $EFGH$ と平面 $IJKL$ は平行になっており、底面 $EFGH$ を側面 $P$ とします。

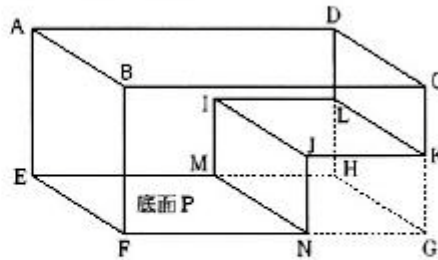
この風呂に、一定の割合で水を入れ、20分後に水を止めました。水を入れ始めてから $x$ 分後の底面 $P$ から水面までの高さを $y$ cmとします。下の表は、このときの $x$ と $y$ の関係を表したものです。ただし、底面 $P$ と水面はつねに平行になっているものとします。

あとの(1), (2)の問いに答えなさい。

図I 太郎さんの家の風呂



図II 風呂の内側



表

|          |   |    |    |    |    |    |
|----------|---|----|----|----|----|----|
| $x$ (分)  | 0 | 4  | 8  | 12 | 16 | 20 |
| $y$ (cm) | 0 | 14 | 28 | 40 | 48 | 56 |

(1) 底面 $P$ から水面までの高さ、底面 $P$ から平面 $IJKL$ までの高さが一致するのは、水を入れ始めてから何分何秒後か、求めなさい。なお、図IIIを利用して考えてもかまいません。

表から $y$ の変化量が変わるのは8~12分の間であることがわかる。

底面 $P$ に到達する前を前半とし、到達後を後半とする。

前半は0~4分の変化の割合から  $y = \frac{7}{2}x$  …① と式を作ることができる

後半は12~16分の変化の割合から  $y = 2x + 16$  …② と式を作ることができる

この前半と後半の式が一致したところが底面 $P$ に到達した時間と考えられる

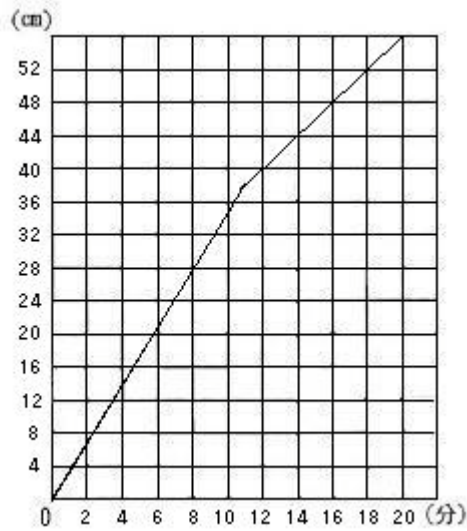
$$\text{①, ②より } \frac{7}{2}x = 2x + 16 \quad \frac{3}{2}x = 16 \quad x = \frac{32}{3} = (10 + \frac{2}{3}) \text{ 分}$$

$$\frac{2}{3} \text{ 分は } 60 \times \frac{2}{3} = 40 \text{ 秒}$$

したがって、10分40秒

答え 10分40秒

図Ⅲ



図Ⅲを利用すると上のような図ができる。ここから解答を考えてもよい

(2)  $AB=65$ ,  $BC=105$ とします。線分JKの長さを求めなさい。

1分間の水の増加量は前半も後半も変わらない(一定の割合で増えていく)。

また、線分FNの長さを  $x$  とおくとする

(1) より1分間に増える水面の高さは前半  $\frac{7}{2}$  cm、後半 2 cm とわかる

$$\text{後半 (1分間の水の増加量)} : 65 \text{ cm (縦)} \times 105 \text{ cm (横)} \times 2 \text{ cm (高さ)} = 13650 \text{ cm}^3$$

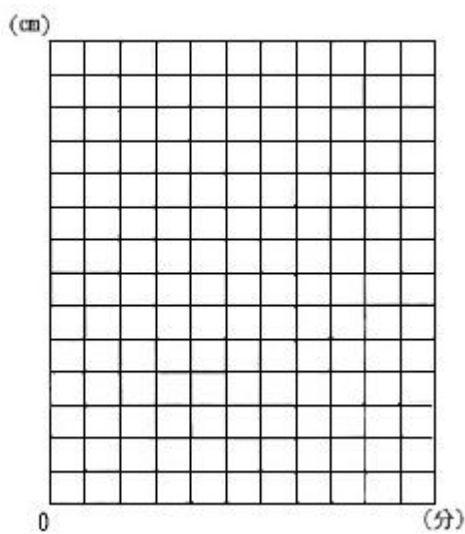
$$\text{前半 (1分間の水の増加量)} : 65 \text{ cm (縦)} \times x \text{ cm (横)} \times \frac{7}{2} \text{ cm (高さ)} = 13650 \text{ cm}^3$$

したがって、  $x=60$

$$JK=BC-FN=105-60=45$$

答え 45 cm

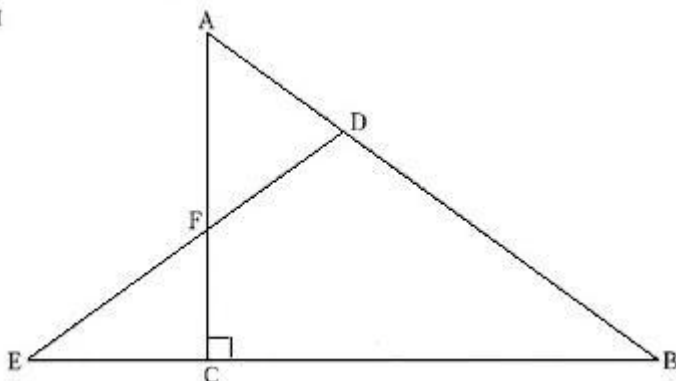
図Ⅲ



2 図Iのような、 $AB : BC = 5 : 4$ 、 $\angle ACB = 90^\circ$ の直角三角形ABCがあり、辺AB上に点Dをとります。また、直線BC上に、 $DB = DE$ となる点Eをとります。ただし、点D、Eは、どちらも点Bと一致しないようにとります。

あとの(1)、(2)の問いに答えなさい。

図I



(1) 線分BDと線分BEの長さの比を求めなさい。

点DからBEに垂線をおろし、交点をGとする

$\triangle ABC \sim \triangle DBG$ なので、 $AB : BC = DB : BG$

$5 : 4 = DB : BG$ となり、 $BG = \frac{4}{5} BD$

同様にして、 $\triangle ABC \sim \triangle DEG$ なので、 $EG = \frac{4}{5} BD$

$BE = BG + EG = \frac{8}{5} BD$

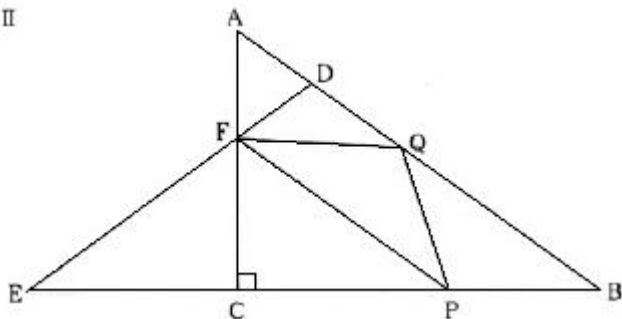
したがって、 $BD : BE = 5 : 8$

答え 5 : 8

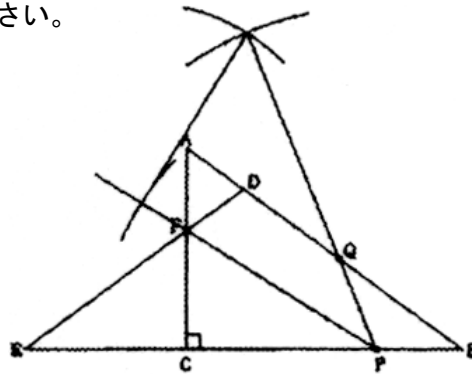
(2) 図IIは、図Iにおいて、 $AD : DB = 1 : 4$ とし、辺ABと線分DEとの交点をFとしたものです。また、辺BC上に点Pを、点Bと一致しないようにとり、辺AB上に点Qを、 $\angle FPQ = \angle ABC$ となるようにとり、 $\triangle FPQ$ をつくります。

あとの(ア)～(ウ)の問いに答えなさい。

図II



(ア) 点Pが解答用紙の図の位置にあるとき、点Qを、 $\triangle ABC$ と合同な三角形を作図することにより求めなさい。作図は、解答用紙の図に行い、点Qの位置を示す文字Qも書きなさい。なお、作図に用いた線は消さずに残しなさい。



(作図の仕方)

$\angle FPQ = \angle ABC$ より  $AB \parallel FP$ なので、線分FPを線分BCと同じ長さになるまで伸ばす  
その点から線分ACの長さと同じ長さを取り、点Pから線分ABの長さと同じ長さをとる  
その交点と点Pを結び、辺ABとの交点をQとする

(イ)  $\triangle FEP \cong \triangle PBQ$ であることを証明しなさい。

$\triangle FEP$ と $\triangle PBQ$ において

$DB = DE$ より、 $\triangle DEB$ は二等辺三角形であるから  $\angle DEB = \angle PBQ \dots \textcircled{1}$

三角形の外角は、それと隣り合わない2つの内角の和に等しいから

$$\angle EPQ = \angle PBQ + \angle BQP$$

$$\angle EPF + \angle FPQ = \angle PBQ + \angle BQP$$

$$\angle FPQ = \angle ABC \text{より、} \angle FPQ = \angle PBQ$$

$$\text{よって、} \angle EPF = \angle BQP \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{2}$ より、2組の角がそれぞれ等しいから  $\triangle FEP \cong \triangle PBQ$

(ウ)  $AB = 10\text{cm}$ とします。 $PQ = QF$ となる時、線分 $BP$ の長さを求めなさい。

(イ)より  $\triangle FEP \sim \triangle PBQ$ なので、 $PQ : FP = BP : FE \dots \textcircled{1}$

$PQ = QF$ なので、 $\triangle QPF$ は二等辺三角形となり、 $\angle PFQ = \angle FPQ$

また、 $DB = DE$ なので、 $\triangle DBE$ は二等辺三角形となり、 $\angle DBE = \angle DEB$

$\angle FPQ = \angle ABC$ なので、 $\angle FPQ = \angle DBE$ となり、2組の角がそれぞれ等しいので、

$\triangle DBE \sim \triangle QPF$ となる

したがって、 $PQ : DB = FP : BE \dots \textcircled{2}$

$AB = 10\text{cm}$  かつ  $AD : DB = 1 : 4$ なので、 $DB = 8\text{cm} \dots \textcircled{3}$

$AB : BC = 5 : 4$ なので、 $BC = 8\text{cm} \dots \textcircled{4}$

(1)より  $BD : BE = 5 : 8$ なので  $8 : BE = 5 : 8$ となり、 $BE = \frac{64}{5} \dots \textcircled{5}$

$\triangle ABC \sim \triangle FEC$ だから、 $AB : BC = FE : CE \dots \textcircled{6}$

$CE = BE - BC = \frac{64}{5} - 8 = \frac{24}{5} \dots \textcircled{7}$

$\textcircled{4}$ ,  $\textcircled{6}$ ,  $\textcircled{7}$ より、 $10 : 8 = FE : \frac{24}{5}$ となり、 $FE = 6\text{cm} \dots \textcircled{8}$

$\textcircled{2}$ ,  $\textcircled{3}$ ,  $\textcircled{5}$ より、 $PQ : 8 = FP : \frac{64}{5}$ となり、 $FP = \frac{8}{5}PQ \dots \textcircled{9}$

$\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{8}$ ,  $\textcircled{9}$ より、 $PQ : \frac{8}{5}PQ = BP : 6$ となり、 $\frac{8}{5}BP = 6$

$BP = \frac{5}{8} \times 6 = \frac{15}{4}$

答え： $\frac{15}{4}$